Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematatisk-fysiske Meddelelser. **XIII,** 8.

# KLEINERE BEITRÄGE ZUR THEORIE DER FASTPERIODISCHEN FUNKTIONEN

# V

VON

HARALD BOHR

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

## Über den Quotienten zweier analytischer fastperiodischer Funktionen.

In der Abhandlung »Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III« (Acta Mathematica, Bd. 47), in welcher die allgemeine Theorie der fastperiodischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$ entwickelt wurde, habe ich u. a. den folgenden Satz bewiesen:

Es sei $-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty$, und es seien $f(s)$ und $g(s)$ zwei in $[\alpha, \beta]$ reguläre fastperiodische Funktionen, von denen $g(s)$ im ganzen Streifen $(\alpha, \beta)$ von Null verschieden ist. Dann ist der Quotient $h(s) = \dfrac{f(s)}{g(s)}$ ebenfalls eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion.

In der vorliegenden Note soll die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes bewiesen werden.

**Satz:** Es sei $-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty$, und es seien $f(s)$ und $g(s)$ zwei in $[\alpha, \beta]$ reguläre fastperiodische Funktionen, von denen $g(s)$ nicht identisch verschwindet. Ferner sei der Quotient $h(s) = \dfrac{f(s)}{g(s)}$ im ganzen Streifen $(\alpha, \beta)$ regulär, d. h. jede im Streifen $(\alpha, \beta)$ gelegene Nullstelle von $g(s)$ sei zugleich Nullstelle von $f(s)$, und zwar von mindestens eben so hoher Multiplizität. Dann ist dieser Quotient $h(s)$ wiederum eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion[1].

[1] Zur Orienterung sei bemerkt, dass es — wie durch einfache Beispiele leicht zu zeigen — sehr wohl vorkommen kann, dass die Projektionen der Nullstellen von $g(s)$ auf die reelle Achse im ganzen Intervall $\alpha < \sigma < \beta$ überall dicht liegen.

Auf den Zusammenhang dieses Satzes — für den Spezialfall $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, d. h. für den Fall, wo $f(s)$ und $g(s)$ ganze Funktionen sind — mit einem schönen, auf Quotienten von Exponentialpolynomen bezüglichen Satz von RITT[1] wird am Schluss dieser Note kurz eingegangen.

Zum Beweise unseres Satzes wird, ausser bekannten Eigenschaften fastperiodischer Funktionen, ein allgemeiner funktionentheoretischer Hilfssatz herangezogen, den ich übrigens, da es für den vorliegenden Zweck genügt, nur für eine spezielle geometrische Konfiguration formuliere.

Hilfssatz: In der komplexen $s$-Ebene seien zwei parallel den Achsen orientierte Rechtecke $R'$ und $R''$ mit dem gemeinsamen Mittelpunkt $s^*$ gegeben, von denen $R'$ im Inneren von $R''$ gelegen ist. Ferner seien die beiden positiven Zahlen $k$ und $K > k$ fest gegeben. Dann gibt es eine positive Konstante

$$\eta_0 = \eta_0(R', R'', s^*, k, K)$$

mit folgender Eigenschaft: Zu jeder im Innern von $R''$ regulären analytischen Funktion $\varphi(s)$, welche innerhalb $R''$ dem Betrage nach $\leq K$, dagegen im Punkte $s^*$ dem Betrage nach $\geq k$ ist, lässt sich ein achsenparalleles Rechteck $R (= R_\varphi)$, das innerhalb $R''$ gelegen ist, aber $R'$ in seinem Innern enthält, derart wählen, dass in jedem Randpunkt $s$ dieses Rechtecks $R$ die Ungleichung

$$|\varphi(s)| > \eta_0$$

besteht.

Auf den (übrigens sehr einfachen) Beweis dieses Hilfssatzes wollen wir hier nicht eingehen, sondern uns mit

[1] J. F. RITT. On the zeros of exponential polynomials, Transact. American Math. Society Bd. 31 (1929) S. 680—686.

dem Hinweis begnügen, dass der Satz z. B. als unmittelbares Korollar der beiden Hilfssätze 2 und 3 einer von Herrn JESSEN und dem Verfasser gemeinsam verfassten Arbeit über die Werteverteilung der speziellen fastperiodischen Funktion $\zeta(s)$ (Acta Mathematica Bd. 54, S. 18—19) abgeleitet werden kann.

**Beweis:** Die Behauptung unseres Satzes lautet, dass bei beliebiger Wahl von zwei den Bedingungen $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ genügenden Zahlen $\alpha'$ und $\beta'$ die Funktion $h(s) = \dfrac{f(s)}{g(s)}$ in $(\alpha', \beta')$ fastperiodisch ist, dass es also zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dicht liegende Menge von zu $h(s)$ im Streifen $(\alpha', \beta')$ gehörigen Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ gibt, d. h. Zahlen $\tau$, welche für alle $s$ des Streifens $(\alpha', \beta')$ der Ungleichung

$$|\, h(s+i\tau) - h(s) \,| \leq \varepsilon$$

genügen.

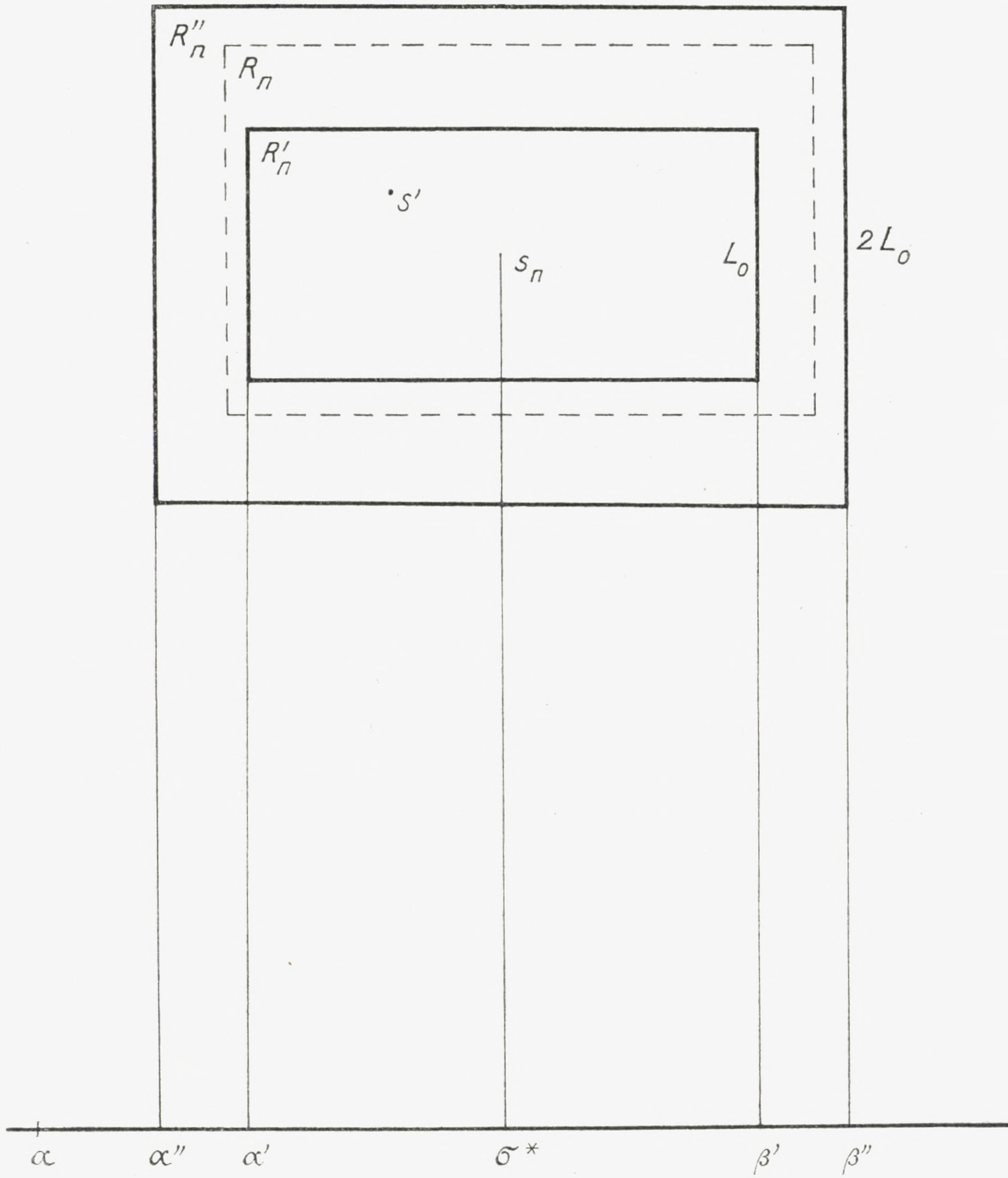
Zu diesem Zweck wählen wir zunächst (siehe die Figur) zu den (schon festgelegten) Zahlen $\alpha'$ und $\beta'$ zwei weitere Zahlen $\alpha''$ und $\beta''$ zwischen $\alpha$ und $\alpha'$ bzw. $\beta$ und $\beta'$; der Einfachheit halber sei etwa $\alpha' - \alpha'' = \beta'' - \beta'$, sodass die beiden Intervalle $(\alpha', \beta')$ und $(\alpha'', \beta'')$ denselben Mittelpunkt $\sigma^* = \frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \frac{1}{2}(\alpha'' + \beta'')$ besitzen. Wir betrachten den Nenner $g(s)$ auf der vertikalen Geraden $\sigma = \sigma^*$; wegen der Fastperiodizität der (nicht identisch verschwindenden) Funktion $\gamma(t) = g(\sigma^* + it)$ der reellen Veränderlichen $t$ lässt sich eine positive Konstante $k_0$, eine Länge $L_0$ und eine abzählbare Menge von reellen Zahlen

$$(-\infty \leftarrow t_{-n}) \ldots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \ldots (t_n \rightarrow \infty)$$

so wählen, dass

$$t_{n+1} - t_n < L_0 \quad (\text{für alle } n = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots)$$

und


R''_n
R_n
R'_n
s'
s_n
L_0
2 L_0
α
α''
α'
σ*
β'
β''

$$|\gamma(t_n)| = |g(\sigma^* + it_n)| > k_0 \quad \text{(für alle } n\text{)}$$

gilt.

Für jeden Wert von $n$ betrachten wir die beiden achsenparallelen Rechtecke $R_n'$ und $R_n''$ mit dem gemeinsamen Mittelpunkt $s_n = \sigma^* + i t_n$, deren Eckpunkte auf den vertikalen Geraden $\sigma = \alpha'$, $\sigma = \beta'$ bzw. $\sigma = \alpha''$, $\sigma = \beta''$ liegen, und deren vertikale Seiten die Längen $L_0$ bzw. $2L_0$ haben. Durch eine vertikale Parallelverschiebung um die Länge $t_{n+1} - t_n$ geht also die Konfiguration $(R_n', R_n'', s_n)$ in die Konfiguration $(R_{n+1}', R_{n+1}'', s_{n+1})$ über. Da die Differenz $t_{n+1} - t_n$ für jedes $n$ kleiner als die vertikale Seitenlänge $L_0$ der Rechtecke $R'$ ist, gehört jeder Punkt $s$ des Streifens $(\alpha', \beta')$ dem Innern wenigstens eines unserer Rechtecke $R_n'$ an.

Wir betrachten nun die Nennerfunktion $g(s)$ im Rechteck $R_n''$ der Konfiguration $(R_n', R_n'', s_n)$. Innerhalb $R_n''$ ist $|g(s)| < K_0$, wo $K_0$ die (endliche) obere Grenze von $|g(s)|$ im ganzen Streifen $(\alpha'', \beta'')$ bezeichnet, und im Mittelpunkt $s_n$ ist $|g(s_n)| > k_0$. Da die verschiedenen Konfigurationen $(R_n', R_n'', s_n)$ einander kongruent sind und durch vertikale Parallelverschiebungen z. B. in die feste Konfiguration $(R_0', R_0'', s_0)$ überführt werden können, ergibt sich aus dem obigen Hilfssatz die Existenz einer festen, d. h. von $n$ unabhängigen positiven Zahl $\eta_0$, nämlich

$$\eta_0 = \eta_0(R_0', R_0'', s_0, k_0, K_0)$$

im Sinne des Hilfssatzes, mit der Eigenschaft, dass es für jedes $n$ ein $R_n'$ umschliessendes, innerhalb $R_n''$ gelegenes achsenparalleles Rechteck $R_n$ gibt, auf dessen ganzem Rand die Ungleichung

$$|g(s)| > \eta_0$$

erfüllt ist.

Die zu beweisende Fastperiodizität von $h(s)$ im Streifen $(\alpha', \beta')$ ist offenbar dargetan, wenn wir folgendes beweisen können: Zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, derart dass jede Zahl $\tau$, welche sowohl für die Funktion $f(s)$ als auch für die Funktion $g(s)$ im Streifen $(\alpha'', \beta'')$ eine zu $\delta$ gehörige Verschiebungszahl ist, zugleich eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $h(s)$ im Streifen $(\alpha', \beta')$ ist; denn nach bekannten Sätzen über fastperiodische Funktionen gibt es für den Streifen $(\alpha'', \beta'')$ relativ dicht liegende gemeinsame Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\delta)$ der beiden fastperiodischen Funktionen $f(s)$ und $g(s)$.

Es sei $C$ eine gemeinsame (endliche) obere Schranke der beide Funktionen $|f(s)|$ und $|g(s)|$ im Streifen $(\alpha'', \beta'')$. Dann, behaupte ich, besitzt die Zahl

$$\delta = \operatorname{Min}\left\{\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0^2 \varepsilon}{4C}\right\} = \delta(\varepsilon)$$

die gewünschte Eigenschaft. Mit anderen Worten: Ist $\tau$ eine beliebige zu $\delta$ gehörige gemeinsame Verschiebungszahl von $f(s)$ und $g(s)$ in $(\alpha'', \beta'')$, so ist $\tau$ zugleich eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl des Quotienten $h(s)$ in $(\alpha', \beta')$, d. h. es besteht die Ungleichung

$$(*) \qquad |h(s+i\tau)-h(s)| \leqq \varepsilon$$

für alle $s$ des Streifens $(\alpha', \beta')$.

Um die Richtigkeit der Ungleichung $(*)$ in einem beliebig gewählten festen Punkt $s = s'$ des Streifens $(\alpha', \beta')$ zu beweisen, bestimmen wir zunächst zu dem betrachteten Punkt $s'$ eine ganze Zahl $n$ derart, dass $s'$ dem Rechteck $R'_n$ angehört, was nach einer oben gemachten Bemerkung möglich ist. Dann liegt $s'$ a fortiori innerhalb des Rechtecks

$R_n$. Nun ist die Funktion $h(s)$, und daher auch die Funktion $\{h(s+i\tau)-h(s)\}$ nach Voraussetzung im ganzen Streifen $(\alpha, \beta)$, also gewiss innerhalb und auf dem Rande unseres Rechtecks $R_n$ regulär. Folglich gilt nach dem Maximumprinzip

$$|h(s'+i\tau)-h(s')| \leqq \underset{\text{auf } R_n}{\text{Max}} |h(s+i\tau)-h(s)|.$$

Zum Beweis der Ungleichung $|h(s'+i\tau)-h(s')| \leqq \varepsilon$ genügt es also, die Ungleichung

$$\underset{\text{auf } R_n}{\text{Max}} |h(s+i\tau)-h(s)| \leqq \varepsilon$$

zu beweisen. Diese ergibt sich aber unmittelbar daraus, dass auf dem ganzen Rande des Rechteckes $R_n$

$$|g(s)| > \eta_0$$

ist. In der Tat gilt für einen beliebigen Randpunkt $s$ von $R_n$ die Ungleichung

$$|g(s+i\tau)| \geqq |g(s)| - |g(s+i\tau)-g(s)| > \eta_0 - \delta \geqq \frac{\eta_0}{2},$$

also

$$|h(s+i\tau)-h(s)| = \left| \frac{f(s+i\tau)}{g(s+i\tau)} - \frac{f(s)}{g(s)} \right|$$

$$= \frac{|g(s)f(s+i\tau)-f(s)g(s+i\tau)|}{|g(s+i\tau)|\,|g(s)|}$$

$$\leqq \frac{|g(s)|\,|f(s+i\tau)-f(s)| + |f(s)|\,|g(s)-g(s+i\tau)|}{|g(s+i\tau)|\,|g(s)|}$$

$$\leqq \frac{C\delta + C\delta}{\frac{\eta_0}{2}\cdot \eta_0} = \frac{4C\delta}{\eta_0^2} \leqq \varepsilon.$$

Es wurde schon oben erwähnt, dass das Ergebnis dieser Abhandlung eine gewisse Beziehung zu einem schönen Satz von Ritt über Exponentialpolynome hat. Der Satz von Ritt lautet:

Es seien $P(s) = \sum_1^N a_n e^{\lambda_n s}$ und $Q(s) = \sum_1^M b_n e^{\mu_n s}$ zwei Exponentialpolynome, für welche der Quotient $R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ eine in der ganzen $s$-Ebene reguläre Funktion ist. Dann ist diese ganze Funktion $R(s)$ wiederum ein Exponentialpolynom $R(s) = \sum_1^L c_n e^{\nu_n s}$.

In diesem Rittschen Satz dürfen die Exponenten $\lambda_n$ und $\mu_n$ beliebige komplexe Zahlen sein. Im Zusammenhang mit der Theorie der fastperiodischen Funktionen interessiert uns aber nur der Spezialfall, wo die Exponenten $\lambda_n$ und $\mu_n$ (und damit von selbst die Exponenten $\nu_n$) reell sind; nur in diesem Fall sind ja die Exponentialpolynome fastperiodische Funktionen. Um den Rittschen Satz für diesen Fall in natürlicher Weise der Theorie der fastperiodischen Funktionen unterzuordnen, d. h. als Spezialfall eines allgemeinen Satzes über solche Funktionen aufzufassen, führen wir zunächst die folgenden Bezeichnungen ein.

Eine in einem Streifen $[\alpha, \beta]$ analytische fastperiodische Funktion, in deren Dirichlet-Entwicklung $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ die Exponenten $\Lambda_n$ nach unten beschränkt sind — und die deshalb bekanntlich von selbst in der ganzen Halbebene $[-\infty, \beta]$ als analytische fastperiodische Funktion existiert — soll vom Typus $A$ heissen, wenn die Exponentenmenge im Endlichen keine Häufungsstelle besitzt, mit anderen Worten, wenn die Glieder so geordnet werden können, dass die Exponentenfolge $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ monoton wächst und gegen $+\infty$ strebt, falls sie nicht nur aus endlich vielen Gliedern besteht. Entsprechend soll eine in $[\alpha, \beta]$ analytische fastperiodische Funktion, deren Exponenten nach oben beschränkt sind — und die deshalb als analytische fastperiodische Funktion in $[\alpha, +\infty]$ existiert — vom Typus $B$ heissen, falls die Exponentenmenge keine Häufungsstelle im Endlichen besitzt, also in eine monoton abnehmende Folge geordnet werden kann, die gegen $-\infty$ strebt, falls sie nicht nur endlich viele Glieder enthält.

Es gelten dann die Sätze:

Satz a. Es seien $f(s)$ und $g(s)$ zwei in $[-\infty, \beta]$ analytische fastperiodische Funktionen, die beide vom Typus $A$ sind, und deren Quotient $h(s) = \frac{f(s)}{g(s)}$ in der ganzen Halbebene $\sigma < \beta$ regulär ist. Dann gehört diese, nach dem Hauptsatz dieser Abhandlung gewiss in $[-\infty, \beta]$ fastperiodische Funktion $h(s)$ ebenfalls zum Typus $A$.

Satz b. Es seien $f(s)$ und $g(s)$ zwei in $[\alpha, +\infty]$ analytische fastperiodische Funktionen vom Typus $B$, deren Quotient $h(s) = \frac{f(s)}{g(s)}$ für $\sigma > \alpha$ regulär und daher in $[\alpha, +\infty]$ fastperiodisch ist. Dann ist dieser Quotient $h(s)$ wiederum vom Typus $B$.

Bemerkung. Aus diesen beiden Sätzen a und b ergibt sich natürlich als sehr spezieller Fall der Rittsche Satz für Exponentialpolynome mit reellen Exponenten; denn ein solches Exponentialpolynom lässt sich ja gerade als eine fastperiodische Funktion charakterisieren, die sowohl vom Typus $A$ als auch vom Typus $B$ ist. Hervorzuheben ist, dass die Dirichlet-Entwicklung einer fastperiodischen Funktion vom Typus $A$ oder $B$ nirgends im gewöhnlichen Sinne zu konvergieren braucht, so dass unsere Sätze nicht in den allgemeineren interessanten Resultaten von Ritt über algebraische Funktionen von gewöhnlichen Dirichletschen Reihen enthalten sind. Auf den Zusammenhang dieser weitergehenden Resultate von Ritt mit der Theorie der fastperiodischen Funktionen gedenke ich in einer späteren Arbeit einzugehen.

Natürlich genügt es, einen der Sätze a und b, etwa den Satz a zu beweisen. Es mögen die Dirichlet-Entwicklungen von $f(s)$ und $g(s)$ in $[-\infty, \beta]$ durch $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ bzw. $\sum B_n e^{M_n s}$ gegeben sein, wobei $\Lambda_1$ bzw. $M_1$ die kleinsten Exponenten von $f(s)$ bzw. $g(s)$ bezeichnen. Dann gelten bekanntlich für $\sigma \to -\infty$ (gleichmässig in $t$) die Beziehungen

$$f(s) = A_1 e^{\Lambda_1 s} + o(e^{\Lambda_1 \sigma}), \quad g(s) = B_1 e^{M_1 s} + o(e^{M_1 \sigma})$$

und daher auch

$$h(s) = \frac{f(s)}{g(s)} = C_1 e^{N_1 s} + o(e^{N_1 \sigma}),$$

wo

$$C_1 = \frac{A_1}{B_1}, \quad N_1 = \Lambda_1 - M_1.$$

Es sind daher nach bekannten Sätzen über fastperiodische Funktionen die Exponenten der Entwicklung $\sum C_n e^{N_n s}$ von $h(s)$ nach unten beschränkt, und es gibt unter ihnen einen kleinsten, nämlich $N_1 = \Lambda_1 - M_1$. Zu beweisen ist, dass die Menge der Exponenten $N_n$ keine Häufungsstelle im Endlichen besitzt. Dies folgt aus dem Multiplikationssatz der Theorie der fastperiodischen Funktionen, nach welchem die Gleichung $f(s) = g(s) \cdot h(s)$ die entsprechende formale Relation

$$\sum A_n e^{\Lambda_n s} = \sum B_n e^{M_n s} \cdot \sum C_n e^{N_n s}$$

nach sich zieht.

Hätte nämlich die Menge der $N_n$ im Endlichen gelegene Häufungsstellen und wäre $F$ deren kleinste, so wäre offenbar $F^* = M_1 + F$ eine Häufungsstelle der Menge $M_1 + N_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und zwar die kleinste; dann wäre aber $F^*$ auch eine Häufungsstelle der Exponentenmenge $\varLambda_n$, d. h. sie könnte bei der Zusammenfassung der durch die formale Reihenmultiplikation entstehenden Glieder nicht beseitigt werden. Denn die Mengen $M_q + N_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, die mit $E_q$ bezeichnet werden sollen, lägen ja alle bis auf eine endliche Anzahl, etwa $E_1, \ldots, E_Q$, vollständig rechts von $F^* + 1$, und von den Mengen $E_1, \ldots, E_Q$ hätte ja nur die eine Menge $E_1$ eine Häufungsstelle in $F^*$.

Forelagt paa Mødet den 29. November 1929.
Færdig fra Trykkeriet den 21. Maj 1935.